المعادلات التفاضلية   Les équations différentielles   ذ:محمد الرقبة

1- تمهيد :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق .

a) حدد f إذا علمت أن : $f'=f$

b) حدد f إذا علمت أن : $f'=af$

c) حدد f إذا علمت أن : $f'(x)=x+1$

هذه المعادلات تسمى معادلات تفاضلية

تعريف:

المعادلة التفاضلية هي معادلة يكون فيها المجهول هو دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة .

أمثلة : 1) $y'-y=0$ 2) $y''+2y'+y+1=0$ 3) $ay'+b=0$.

2- حل المعادلة التفاضلية :

$y'+ay=0$ حيث $a\in\mathbb{R}$

خاصية :

المعادلة التفاضلية $y'+ay=0$ تقبل ما لا نهاية من الحلول و هي الدوال التي المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي تكتب على الشكل $x\mapsto\lambda e^{-ax}$ حيث $\lambda\in\mathbb{R}$

3- المعادلات التفاضلية من نوع $y''+ay'+by=0$

1- تناسب دالتين :

لتكن f و g دالتين معرفتين على I

نقول أن f و g متناسبتين إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي k : $g(x)=kf(x)$ $\forall x\in I$

2- لتكن y_1 حلا للمعادلة (E)

و y_2 حلا للمعادلة (E)

بين أن $\alpha y_1+\beta y_2$ هي أيضا حلا للمعادلة (E)

3- نتيجة :

كل حل للمعادلة التفاضلية (E) هو تألفة خطية لحلين غير متناسبين للمعادلة التفاضلية (E)

4- لنبحث على حلول المعادلة (E) على الشكل $y=e^{rx}$ $r\in\mathbb{R}$

المعادلة : $r^2+ar+b=0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $y''+ay'+by=0$.

خلاصة وخاصية :

(E) $y''+ay'+by=0$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

ولتكن (1) $r^2+ar+b=0$ معادلتها المميزة

1) إذا كان $a^2-4b\succ0$ فإن حل المعادلة (E) هو مجموعة الدوال $x\mapsto\lambda e^{r_1x}+\mu e^{r_2x}$

حيث $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

حيث r_1 و r_2 هما حلي المعادلة (1)

2) إذا كانت $a^2-4b=0$ فإن حل المعادلة (E) هو مجموعة الدوال $x\mapsto(\lambda x+\mu)e^{r_0x}$

حيث $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

حيث r_0 هو حل المعادلة (1)

3) إذا كانت $a^2-4b\prec 0$ فإن حل المعادلة (E) هو مجموعة الدوال

$$x\mapsto e^{px}(\lambda\cos qx+\mu\sin qx)$$

حيث $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$

حيث $r_1=p+iq$ و $r_2=p-iq$ هما الحلين العقديين للمعادلة (1)

تطبيق:

حل كل معادلة من المعادلات التالية :

1) $y''+2y-3y=0$
2) $y''+4y'+4y=0$
3) $y''+2y'+5y=0$
4) $y''+4y=0$
5) $y''-4y=0$
6) $y''-w^2y=0$
7) $y''+w^2y=0$

4- المعادلات التفاضلية من نوع $y'+ay=f(x)$ أو $y''+ay'+by=f(x)$

خاصية :

1) ليكن y_0 حلا خاصا للمعادلة للمعادلة $(E)\quad y'+ay=f(x)$

و z الحل العام للمعادلة $(E')\quad y'+ay=0$

الحل العام للمعادلة (E) هو $y=z+y_0$

2) ليكن y_0 حلا خاصا للمعادلة للمعادلة $(E)\quad y''+ay'+by=f(x)$

و z الحل العام للمعادلة $(E')\quad y''+ay'+by=0$

الحل العام للمعادلة (E) هو $y=z+y_0$

أمثلة :

$\begin{cases} y'+ay=P(x)\,(1) \\ y''+ay'+by=P(x)\,(2)\end{cases}$ الحل الخاص هو حدودية درجتها هي درجة P

$\begin{cases} y'+ay=k\cos(wx+\varphi)\,(3) \\ y''+ay'+by=k\cos(wx+\varphi)\,(4)\end{cases}$ الحل الخاص من نوع $y_0=\lambda\cos wx+\mu\sin wx$

$\begin{cases} y'+ay=ke^{\alpha x}\,(5) \\ y''+ay'+by=ke^{\alpha x}\,(6)\end{cases}$ الحل الخاص من نوع $y_0=P(x)e^{\alpha x}$

درجة P هي درجة المعادلة .